

学科Ⅲ 構造

Lesson2 力のつり合い



どの項目もそうですが、
問題を解く時は、
第一問目から順番に
解いて下さい。



□出題頻度 重要度 ★★★

28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	---

□ポイント

近年の出題はありませんが、構造力学の基本となる部分です。

他の問題を解く時に、考え方の基礎となる部分なので、この lesson2 はきちんと理解し、解けるようになって下さい。

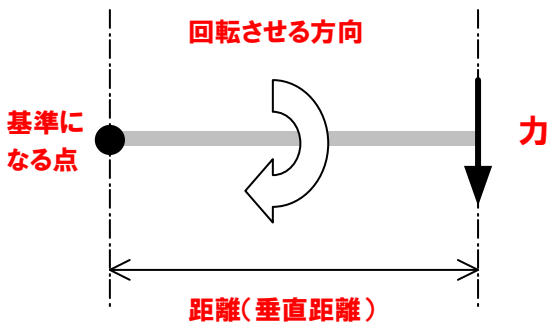
逆に言うと、この「力のつり合い」が理解できていないと、他の構造力学の問題は解く事ができません。

□基本事項1 モーメント（回転させる力）

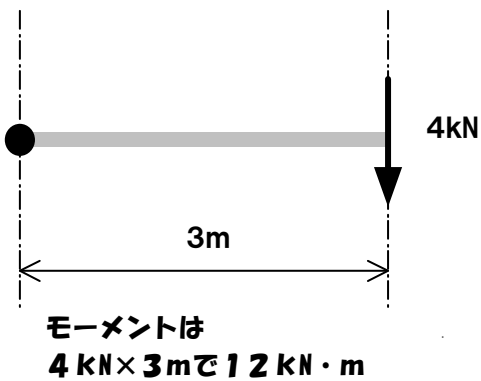
モーメント = 力 × 距離（垂直距離）

まずは、この公式を覚えて下さい。モーメントとは回転させる力の事を言います。力が大きいと当然回転させる力も強くなり、基準になる点から力のかかる距離が離れても、モーメントは大きくなります。

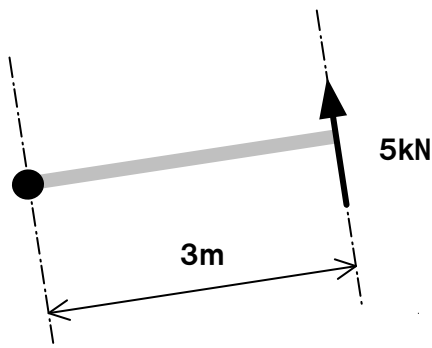
符号は、基準になる点から、右回りに回転させるモーメントを+、左回りに回転させる力を-とします。



左図の場合は、基準になる点から右回りに回転させる力が働きますので、プラスのモーメントが作用します。距離は垂直距離、（矢印との距離が一番近い距離）になります。



例えば、この場合だと、力4kN×距離3mなのでモーメントは、+12kN・mとなります。モーメントの単位は、**kN・m**になりますが、単位も掛け算している事に着目して下さい。



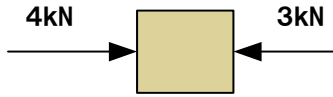
矢印の向きが斜めになっても同じです。この場合は、基準の点から左回りに回転しますので-15kN・mですね。距離は力に対して一番近い距離（矢印に対して直角）ですよ。

モーメントの考え方、わかりましたでしょうか？
モーメントとは、基準になる点を回転させる力です。

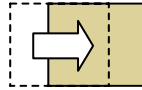
□基本事項2 力のつり合い

建物や部材（梁など）にはいくつかの力が作用していますが、その部材が**静止する為**には、縦方向や横方向の力がつり合っていなければなりません。

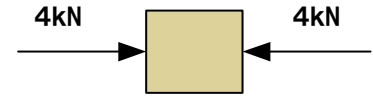
例えば、ある物体に、右向きを4 kN、左向きを3 kN作用させたとしても、右向きの力の方が大きいので、その物体は右方向に移動してしまう事になります。



力がつり合っていないと

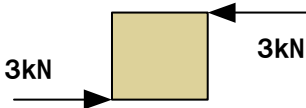


物体は移動します (-_-:)

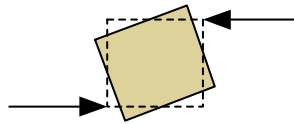


力をつり合わせると、物体は静止します。上下に関しても同じです

でも、たとえ左右（上下）からの力がつり合っていたとしても、

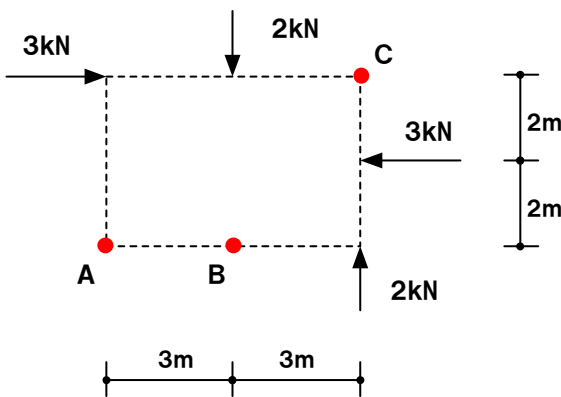


力のかかる位置がずれると



物体は回転してしまいます 静止しません。(>_<) つまり、つり合っていません。

ここで、物体を回転させない為に、モーメントについて考えてあげるのです。モーメントをつり合わせると、物体は回転しません。



左の図で、A点を基準にモーメントを考えてみます。作用している力は4つありますので、それぞれの力についてモーメントを考えてみると

$$3 \times 4 + 2 \times 3 - 3 \times 2 - 2 \times 6 = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

0になりましたね。これでモーメントとはつり合っている事になります。物体（点線の四角）が回転する事はありません。B点、C点においても、モーメントは0 kN・mになりますよ。もちろん、上下、左右の力もつり合っています。

B点におけるモーメントは

$$3 \times 4 + 2 \times 0 - 3 \times 2 - 2 \times 3 = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

ちゃんと0になりました。上からの2 kNの力に関しては距離がありませんので、モーメントも発生しません。

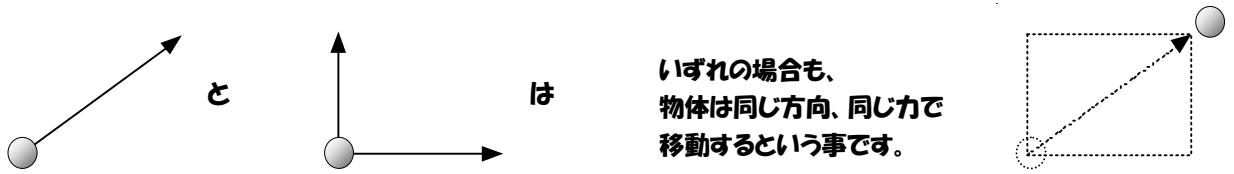
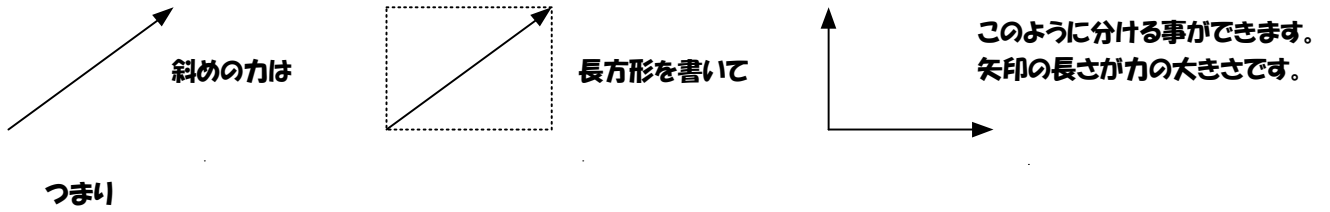
C点におけるモーメントは

$$3 \times 0 - 2 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 0 = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

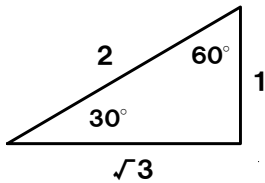
左からの力と下からの力は距離が0ですね。

□基本事項3 力の分解

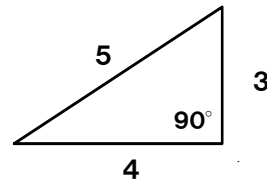
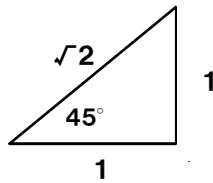
斜めに作用する力は、縦方向と横方向の力に分解して計算することができます。
 斜めの力（矢印）を包含する長方形を作り、その長方形の縦の長さ（高さ）と横の長さ（長さ）を求めます。



矢印の角度によって、分解した時の力の大きさが決まりますので、三角形の比率を覚えておいて下さい。

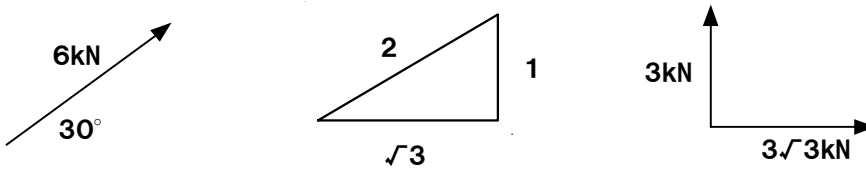


$\sqrt{2}$ は1.414 $\sqrt{3}$ は1.732でしたわ。



3:4:5になる三角形も、直角ができますので覚えておいて下さい。

例えば、6 kNで30°の力はこのように分解することができます。



30°の場合は 1:2: $\sqrt{3}$ なので

2に対するところが6kNだから
 1に対するところは、3kN
 $\sqrt{3}$ に対するところは、 $3\sqrt{3}$ kNになります。

$$\begin{aligned} 6 : 2 &= x : 1 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

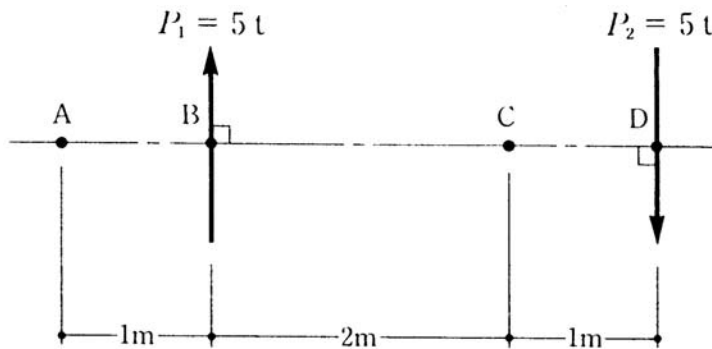
$$\begin{aligned} 6 : 2 &= x : \sqrt{3} \\ 2x &= 6\sqrt{3} \\ x &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

■練習問題 (過去類似問題)

(問題 1) 1994 類似問題

図のような平行な二つの力 P_1 、 P_2 による A、B、C、D の各点におけるモーメント M_A 、 M_B 、 M_C 、 M_D の値の組合せとして、正しいものは、次のうちどれか。ただし、モーメントの符号は、時計回りを正とする。

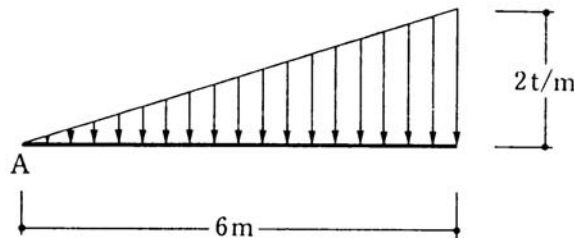
	M_A	M_B	M_C	M_D
1.	$-5 t \cdot m$	$-5 t \cdot m$	$0 t \cdot m$	$5 t \cdot m$
2.	$-5 t \cdot m$	$0 t \cdot m$	$15 t \cdot m$	$0 t \cdot m$
3.	$0 t \cdot m$	$15 t \cdot m$	$0 t \cdot m$	$15 t \cdot m$
4.	$15 t \cdot m$	$-5 t \cdot m$	$0 t \cdot m$	$5 t \cdot m$
5.	$15 t \cdot m$	$15 t \cdot m$	$15 t \cdot m$	$15 t \cdot m$



(問題 2) 1995 類似問題

図のような分布荷重が作用するとき、A 点から荷重の合力の作用線までの距離として、正しいものは、次のうちどれか。

1. 3.0m
2. 3.5m
3. 4.0m
4. 4.5m
5. 5.0m



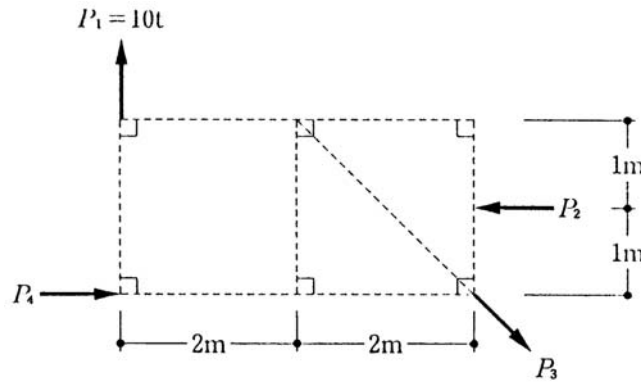
※分布荷重とは、1点だけではなく、その範囲全てに連続して作用する力の事を言います。

2t/mというのは、1mにつき2tの力が作用しているという事です。

(問題 3) 1996 類似問題

図のように、四つの力 ($P_1 \sim P_4$) がつり合っているとき、 P_2 の値として、正しいものは、次のうちどれか。

1. 10t
2. 20t
3. 30t
4. 40t
5. 50t



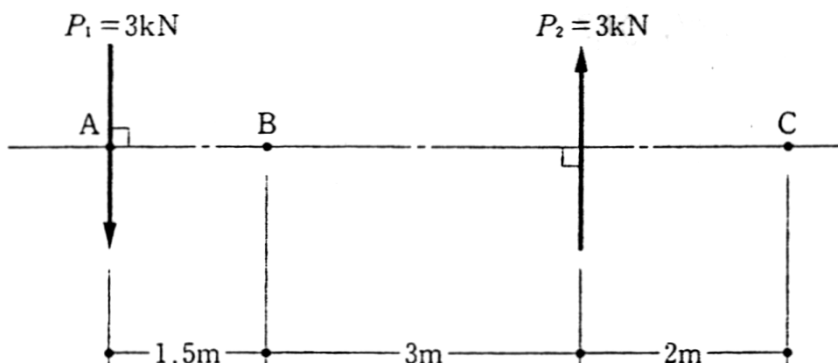
※ついでに、 P_3 と P_4 の値も求めてみましょう。

(問題 4) 1999 類似問題

図のような平行な二つの力 P_1 、 P_2 による A、B、C の各点におけるモーメント M_A 、 M_B 、 M_C の値の組合せとして、正しいものは、次のうちどれか。ただし、モーメントの符号は、時計回りを正とし、 $1\text{kN} = 0.102\text{tf}$ とする。

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

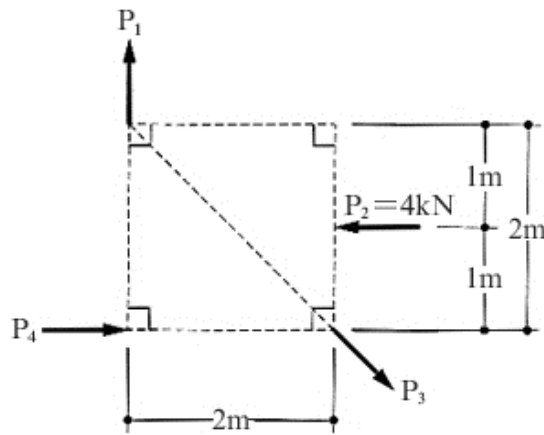
	M_A	M_B	M_C
1.	$-13.5\text{kN}\cdot\text{m}$	$-13.5\text{kN}\cdot\text{m}$	$-23.5\text{kN}\cdot\text{m}$
2.	$-13.5\text{kN}\cdot\text{m}$	$-13.5\text{kN}\cdot\text{m}$	$-13.5\text{kN}\cdot\text{m}$
3.	$13.5\text{kN}\cdot\text{m}$	$-13.5\text{kN}\cdot\text{m}$	$25.5\text{kN}\cdot\text{m}$
4.	$13.5\text{kN}\cdot\text{m}$	$13.5\text{kN}\cdot\text{m}$	$13.5\text{kN}\cdot\text{m}$
5.	$13.5\text{kN}\cdot\text{m}$	$13.5\text{kN}\cdot\text{m}$	$25.5\text{kN}\cdot\text{m}$



(問題 5) 2003 類似問題

図のような四つの力 $P_1 \sim P_4$ がつり合っているとき、 P_4 の値として、正しいものは、次のうちどれか。

1. 1kN
2. 2kN
3. 3kN
4. 4kN
5. 5kN



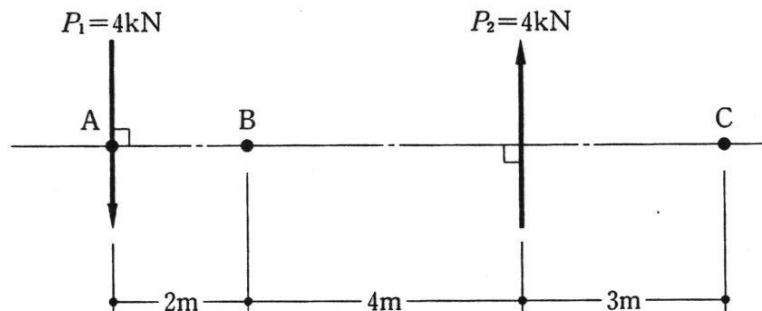
※ついでに、 P_1 と P_3 の値も求めてみましょう。

(問題 6) 2006 類似問題

図のような平行な二つの力 P_1 、 P_2 によるA、B、Cの各点におけるモーメント M_A 、 M_B 、 M_C の値の組合せとして、正しいものは、次のうちどれか。ただし、モーメントの符号は、時計回りを正とする。

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

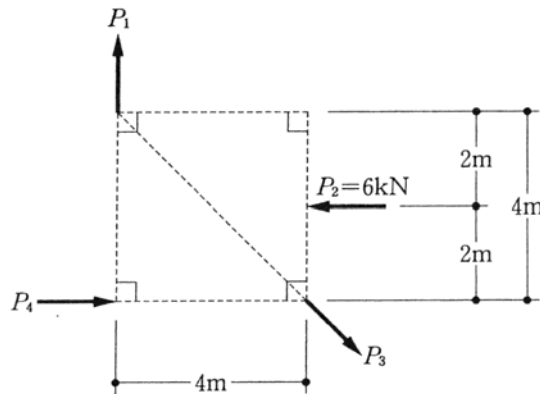
	M_A	M_B	M_C
1.	$24 \text{ kN} \cdot \text{m}$	$24 \text{ kN} \cdot \text{m}$	$24 \text{ kN} \cdot \text{m}$
2.	$24 \text{ kN} \cdot \text{m}$	$24 \text{ kN} \cdot \text{m}$	$48 \text{ kN} \cdot \text{m}$
3.	$24 \text{ kN} \cdot \text{m}$	$-24 \text{ kN} \cdot \text{m}$	$48 \text{ kN} \cdot \text{m}$
4.	$-24 \text{ kN} \cdot \text{m}$	$-24 \text{ kN} \cdot \text{m}$	$-24 \text{ kN} \cdot \text{m}$
5.	$-24 \text{ kN} \cdot \text{m}$	$-24 \text{ kN} \cdot \text{m}$	$-48 \text{ kN} \cdot \text{m}$



(問題7) 2007 類似問題

図のような四つの力 $P_1 \sim P_4$ が釣り合っているとき、 P_4 の値として、正しいものは、次のうちどれか。

1. 2kN
2. 3kN
3. 4kN
4. 5kN
5. 6kN

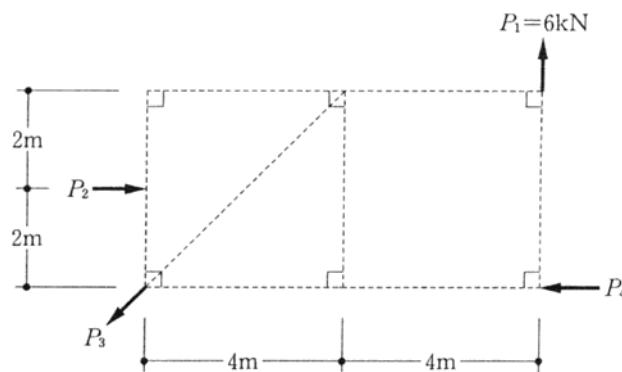


※ついでに、 P_1 と P_3 の値も求めてみましょう。

(問題8) 2008 類似問題

図のような四つの力 $P_1 \sim P_4$ が釣り合っているとき、 P_2 の値として、正しいものは、次のうちどれか。

1. 30kN
2. 24kN
3. 18kN
4. 12kN
5. 6kN



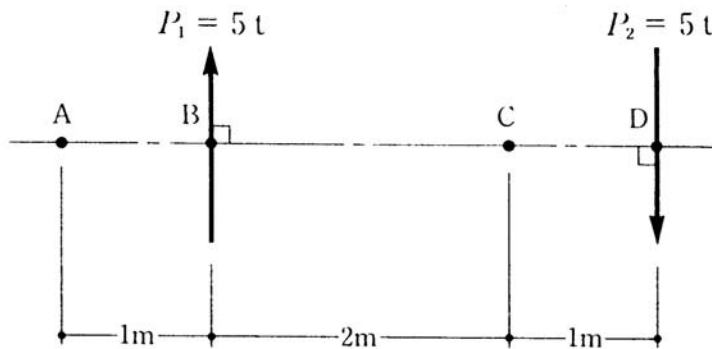
※ついでに、 P_3 と P_4 の値も求めてみましょう。

■練習問題 解答編

(問題 1) 1994 類似問題

図のような平行な二つの力 P_1 、 P_2 による A、B、C、D の各点におけるモーメント M_A 、 M_B 、 M_C 、 M_D の値の組合せとして、正しいものは、次のうちどれか。ただし、モーメントの符号は、時計回りを正とする。

	M_A	M_B	M_C	M_D
1.	$-5 t \cdot m$	$-5 t \cdot m$	$0 t \cdot m$	$5 t \cdot m$
2.	$-5 t \cdot m$	$0 t \cdot m$	$15 t \cdot m$	$0 t \cdot m$
3.	$0 t \cdot m$	$15 t \cdot m$	$0 t \cdot m$	$15 t \cdot m$
4.	$15 t \cdot m$	$-5 t \cdot m$	$0 t \cdot m$	$5 t \cdot m$
5.	$15 t \cdot m$	$15 t \cdot m$	$15 t \cdot m$	$15 t \cdot m$



正解 5

A 点から順番にモーメントを求めていきましょう。モーメントの求め方は **力×距離（右回りを+）** でしたね。基準になる点からの距離と、矢印の向きを確認して、モーメントを足していきます。

A 点におけるモーメント $-5t \times 1m + 5t \times 4m = 15t \cdot m$

B 点におけるモーメント $5t \times 0m + 5t \times 3m = 15t \cdot m$ （距離が $0m$ の場合は書く必要ありませんね。）

C 点におけるモーメント $5t \times 2m + 5t \times 1m = 15t \cdot m$

D 点におけるモーメント $5t \times 3m = 15t \cdot m$

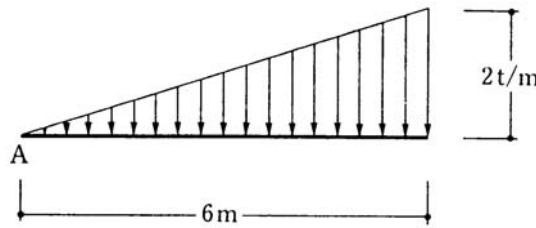
答えは5番になります。

全ての点におけるモーメントが同じになりました。実はこれは偶然ではないのです。大きさが同じで、方向が反対に向いている、並行な力が作用している場合は、どの点をとってもモーメントは等しくなります。覚えておくと便利かもしれませんね。

(問題2) 1995 類似問題

図のような分布荷重が作用するとき、A点から荷重の合力の作用線までの距離として、正しいものは、次のうちどれか。

1. 3.0m
2. 3.5m
3. 4.0m
4. 4.5m
5. 5.0m



※分布荷重とは、1点だけではなく、その範囲全てに連続して作用する力の事を言います。

2t/mというのは、1mにつき2tの力が作用しているという事です。

ただし、この問題の場合は、三角形になっていますので、連続している荷重は、その位置によって異なる値になります。

正解 3

合力というのは、分布荷重が1点にかかった場合の荷重だと考えて下さい。

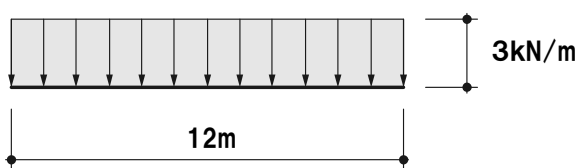
この場合は、三角形の面積が合力になります。

その合力が作用する位置ですが、三角形の重心の位置と考えます。

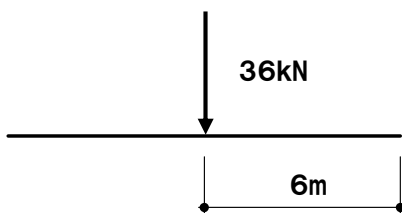
三角形の重心位置は、A点から三角形の2/3のところ、つまり $6\text{m} \times 2/3$ で、4mになります。

ちなみに、連続して一様に荷重がかかっている分布荷重を等分布荷重と言います。

この場合、合力の作用する位置は、ちょうど真ん中です。



このような力のかかり方を等分布荷重と言います。1mあたり3kNの力がかかっているという事です。全体では、 $3\text{kN/m} \times 12\text{m} = 36\text{kN}$ ですね。つまり、合力はこの36kNです。



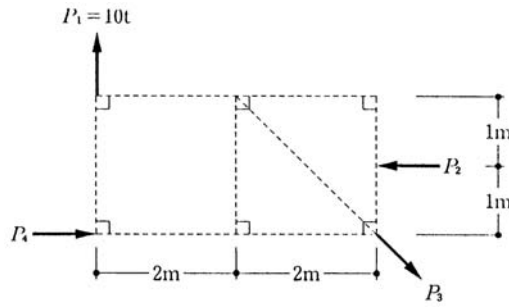
この等分布荷重は、真ん中に36kNの力がかかっているのと同じという事になります。(真ん中が四角形の重心です。)

この等分布荷重の考え方は、静定梁の部分でも必要ですので、覚えておいて下さい。

(問題3) 1996 類似問題

図のように、四つの力 ($P_1 \sim P_4$) がつり合っているとき、 P_2 の値として、正しいものは、次のうちどれか。

1. $10t$
2. $20t$
3. $30t$
4. $40t$
5. $50t$

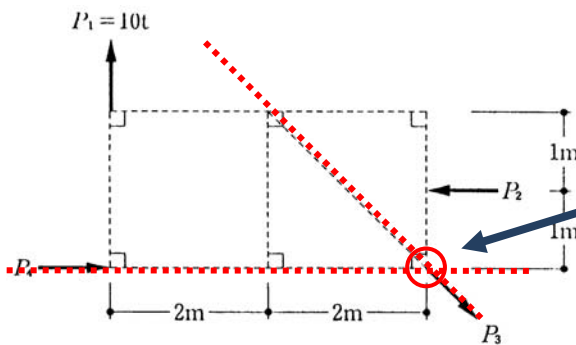


※ついでに、 P_3 と P_4 の値も求めてみましょう。

正解 4

つり合っているという事は、どの点においても、モーメントは $0t \cdot m$ になるという事でした。ですから、どこかの点を基準にして、モーメントを求め、それが $0t \cdot m$ になるようにすればいいのです。

では、どの点を基準にするかですが、求めたい P_2 の力と、既に分かっている P_1 の力以外の力、つまり P_3 と P_4 が交わる場所にします。
交わる場所は、 P_3 から P_4 からも距離が $0m$ になり、モーメントはありません。



この交った点を基準にしてモーメントを求めます。
 P_3 と P_4 は距離が $0m$ なのでモーメントも 0 になります。

○の部分を中心に、モーメントを求めると

$$10t \times 4m - P_2 \times 1m \quad \text{となりますよね。}$$

これが $= 0t \cdot m$ になるように、計算式を解けばいいのです。

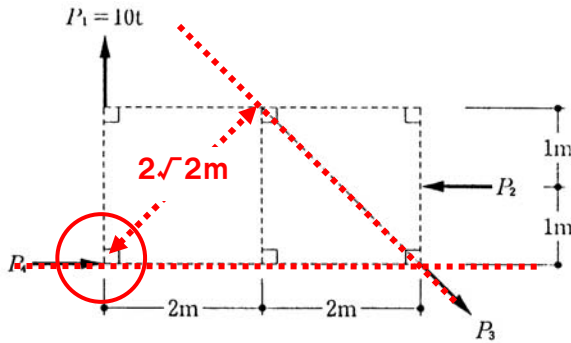
$$10t \times 4m - P_2 \times 1m = 0$$

P_2 を求めると、 $40t \cdot m$ になりますよね。

では、残りの P3と P4の力も求めてみましょう。

P3の力を求めるには、力がわからない P4 の作用線上に、基準の点を設けます。

P3までの距離がわかる位置、さらには P1とも交わる方がいいでしょう。

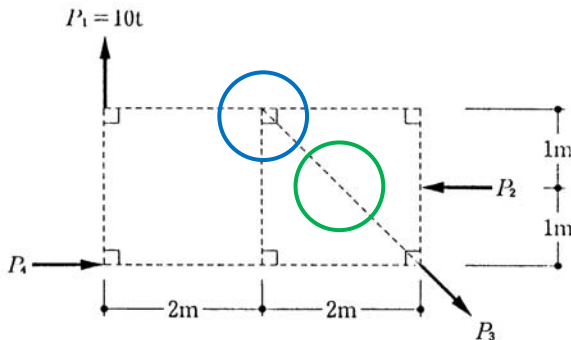


○ を基準にモーメントを求めると
 $-40t \times 1m + P3 \times 2\sqrt{2}m = 0$ (40tは P2の力)
 $P3 = 10\sqrt{2}$
 となります。

最後は P4です。

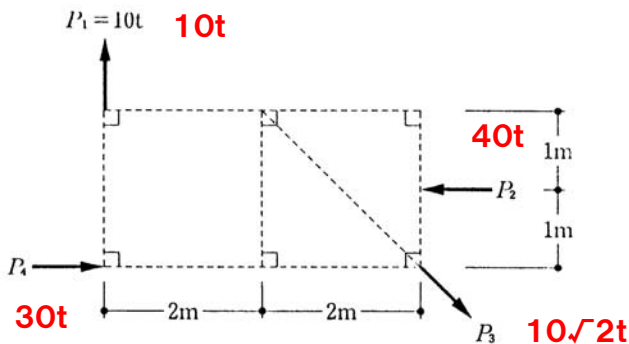
P4以外の力は全て求まりましたので、どこを基準の点にしても求める事が可能です。

計算が一番楽そうなところを選んであげるといいでしょう。

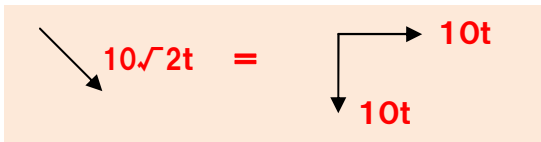


P3上の○を基準の点にしてみました。
 $10t \times 2m - P4 \times 2m + 40 \times 1 = 0$
 $P4 = 30$
 となります。

別に○の位置でも問題ありません。
 こっちの方が、計算は楽かもしれませんね。



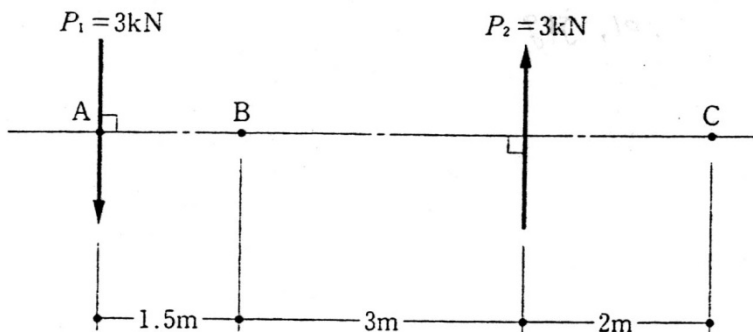
上下方向の力もつり合っていますよね。
 左右の力もつり合っています。
 全てつり合っていますので、移動も回転も
 する事はありません。



(問題 4) 1999 類似問題

図のような平行な二つの力 P_1 、 P_2 による A、B、C の各点におけるモーメント M_A 、 M_B 、 M_C の値の組合せとして、正しいものは、次のうちどれか。ただし、モーメントの符号は、時計回りを正とし、 $1\text{kN} = 0.102\text{tf}$ とする。

	M_A	M_B	M_C
1.	$-13.5\text{kN}\cdot\text{m}$	$-13.5\text{kN}\cdot\text{m}$	$-23.5\text{kN}\cdot\text{m}$
2.	$-13.5\text{kN}\cdot\text{m}$	$-13.5\text{kN}\cdot\text{m}$	$-13.5\text{kN}\cdot\text{m}$
3.	$13.5\text{kN}\cdot\text{m}$	$-13.5\text{kN}\cdot\text{m}$	$25.5\text{kN}\cdot\text{m}$
4.	$13.5\text{kN}\cdot\text{m}$	$13.5\text{kN}\cdot\text{m}$	$13.5\text{kN}\cdot\text{m}$
5.	$13.5\text{kN}\cdot\text{m}$	$13.5\text{kN}\cdot\text{m}$	$25.5\text{kN}\cdot\text{m}$



正解 2

この問題は、問題1の解説を見れば、すぐにわかりますよね。

同じ大きさの力が反対向きに平行に作用しています。つまり、どこかの点のモーメントを求めても値は同じになります。

M_A 、 M_B 、 M_C の全てが同じ値をしているのは、

あれっ、2番と4番がありました。(・_・)

仕方ありません、計算しましょう。

A 点におけるモーメント $-3\text{kN}\times 4.5\text{m} = -13.5\text{kN}\cdot\text{m}$ (この時点で2番に決定します。)

B 点におけるモーメント $-3\text{kN}\times 1.5\text{m} - 3\text{kN}\times 3\text{m} = -13.5\text{kN}\cdot\text{m}$

C 点におけるモーメント $-3\text{kN}\times 6.5\text{m} + 3\text{kN}\times 2\text{m} = -13.5\text{kN}\cdot\text{m}$

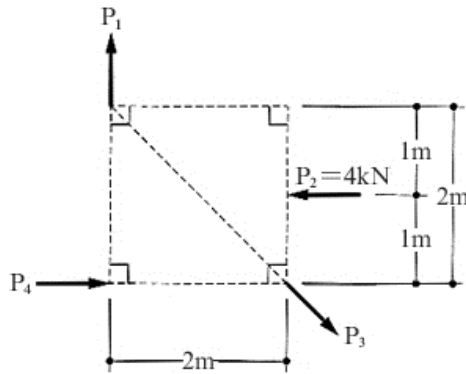
全て $-13.5\text{kN}\cdot\text{m}$ になりましたね。

正解はやっぱり2番でした。

(問題5) 2003 類似問題

図のような四つの力 $P_1 \sim P_4$ がつり合っているとき、 P_4 の値として、正しいものは、次のうちどれか。

1. 1kN
2. 2kN
3. 3kN
4. 4kN
5. 5kN



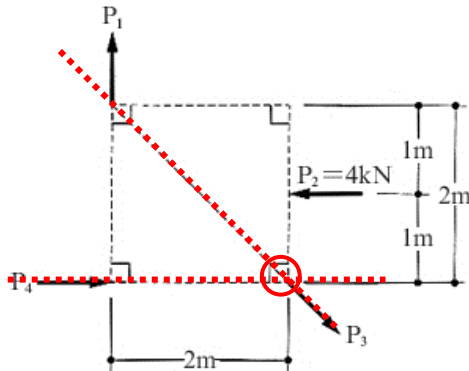
※ついでに、 P_1 と P_3 の値も求めてみましょう。

正解 2

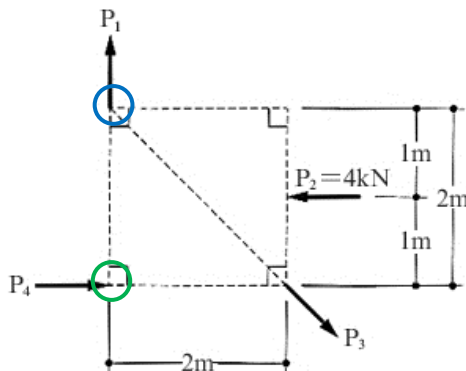
この問題は、問題3と全く同じ考え方です。

つり合っているという事は、どの点を基準にしても、モーメントは $0\text{kN}\cdot\text{m}$ になります。

求めたい力が P_4 で、既に分かっている力が P_2 ですから、それ以外の P_3 と P_4 からの距離が 0m になる点つまり P_3 と P_4 が交わる点を基準に、モーメントを考えて下さい。



交わる点 \bigcirc を基準にモーメントを求めると
 $P_1 \times 2\text{m} - 4\text{kN} \times 1\text{m} = 0$
 $P_1 = 2\text{kN}$
 になります。



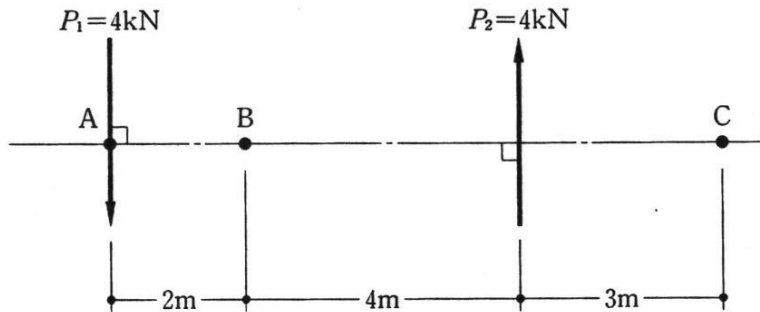
今度は \bigcirc を基準にモーメントを求めてみましょう
 $-P_4 \times 2\text{m} + 4\text{kN} \times 1\text{m} = 0$
 $P_4 = 2\text{kN}$
 P_4 は 2kN になりました。

最後は \bigcirc が基準です。 P_3 との距離は $\sqrt{2}$ になります。
 $-4\text{kN} \times 1 + P_3 \times \sqrt{2}$
 $P_3 = 2\sqrt{2}$
 これで全て求まりました。

(問題 6) 2006 類似問題

図のような平行な二つの力 P_1 、 P_2 による A、B、C の各点におけるモーメント M_A 、 M_B 、 M_C の値の組合せとして、正しいものは、次のうちどれか。ただし、モーメントの符号は、時計回りを正とする。

	M_A	M_B	M_C
1.	24 kN・m	24 kN・m	24 kN・m
2.	24 kN・m	24 kN・m	48 kN・m
3.	24 kN・m	-24 kN・m	48 kN・m
4.	-24 kN・m	-24 kN・m	-24 kN・m
5.	-24 kN・m	-24 kN・m	-48 kN・m



正解 4

この問題も全て値が同じ1番か4番になるという事はわかるのですが、符号がどちらかわかりません。計算してみましょう。

A点におけるモーメント $-4\text{kN} \times 6\text{m} = -24\text{kN}\cdot\text{m}$ (これで正解は4番になります。)

B点におけるモーメント $-4\text{kN} \times 2\text{m} - 4\text{kN} \times 4\text{m} = -24\text{kN}\cdot\text{m}$

C点におけるモーメント $-4\text{kN} \times 9\text{m} + 4\text{kN} \times 3\text{m} = -24\text{kN}\cdot\text{m}$

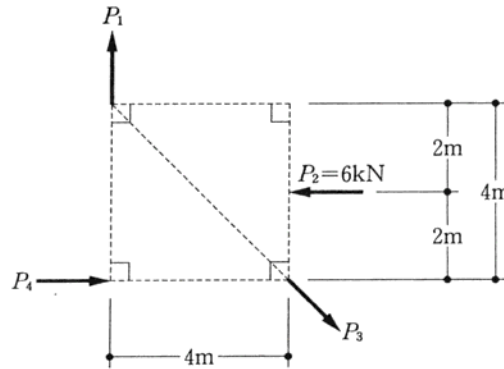
全て同じ値になりました。

この問題がでたら確実に1点ゲットですね。 (^_^) v

(問題 7) 2007 類似問題

図のような四つの力 $P_1 \sim P_4$ が釣り合っているとき、 P_4 の値として、正しいものは、次のうちどれか。

1. 2kN
2. 3kN
3. 4kN
4. 5kN
5. 6kN

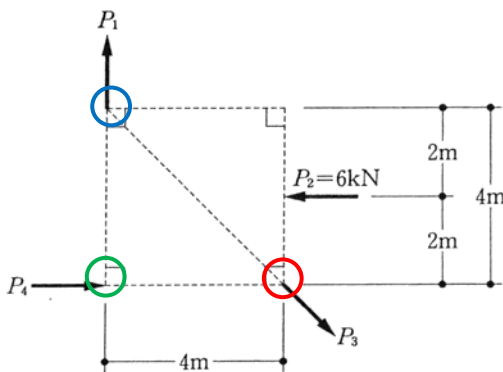


※ついでに、 P_1 と P_3 の値も求めてみましょう。

正解 2

この問題も既にラッキー問題になりつつありますね。

求めたい力が P_4 で、既に分かっている力が P_2 ですから、残りの P_1 と P_3 の交わる点を基準にモーメントを考えます。



P4を求める
 P_1 と P_3 の交わる点 \circ を基準にモーメントを考えると
 $-P_4 \times 4m + 6kN \times 2m = 0$
 $P_4 = 3kN$
 3kNになりますね。

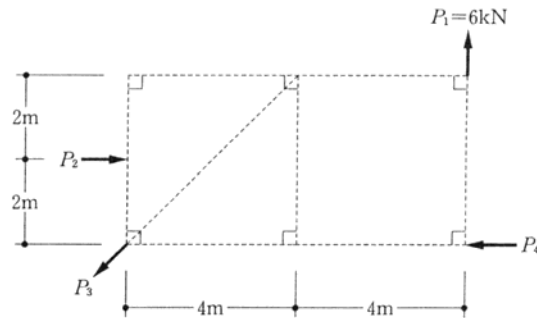
P1を求める
 P_3 と P_4 の交わる点 \circ が基準です。
 $P_1 \times 4m - 6kN \times 2m = 0$
 $P_1 = 3kN$

P3を求める
 P_1 と P_4 の交わる点 \circ が基準です。
 $-6kN \times 2m + P_3 \times 2\sqrt{2}m = 0$
 $P_3 = 3\sqrt{2}kN$ (P3までの距離は $2\sqrt{2}m$)

(問題8) 2008 類似問題

図のような四つの力 $P_1 \sim P_4$ が釣り合っているとき、 P_2 の値として、正しいものは、次のうちどれか。

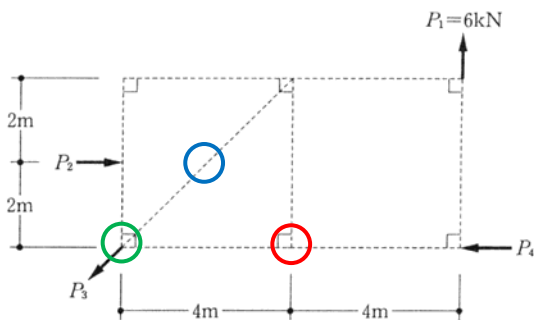
1. 30kN
2. 24kN
3. 18kN
4. 12kN
5. 6kN



※ついでに、 P_3 と P_4 の値も求めてみましょう。

正解 2

この問題は、確実に1点取りましょう。



P2を求める

P_3 と P_4 の交わる点 \odot を基準にモーメントを考えます

$$P_2 \times 2m - 6kN \times 8m = 0$$

$$P_2 = 24kN$$

24kNになります。

残りの P_3 と P_4 も考えてみましょう。

P4を求める

\odot で考えてみましょう。

$$-6kN \times 6m + P_4 \times 2m = 0$$

$$P_4 = 18kN$$

P3を求める

\odot で考えます。

$$24kN(P_2) \times 2m - P_3 \times 2\sqrt{2} - 6kN \times 4m = 0$$

$$P_3 = 6\sqrt{2}kN \quad (\text{P3までの距離は} 2\sqrt{2}m)$$

もちろん、 P_2 がわかればOKです。

■正誤問題

Lesson2 力のつり合いでは、特にありません。